МОДЕЛИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО СПРОСА И ПРЕДПОЧТЕНИЙ ПРИ ВЫБОРЕ КОМПЛЕКСНЫХ УСЛУГ С УЧЕТОМ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

А.В. Киседобрев,
доцент кафедры прикладной информатики
Санкт-Петербургской академии управления и экономики

А.В. Лях,
аспирант кафедры экономики туризма Санкт-Петербургского
государственного университета сервиса и экономики

Ключевым вопросом, решаемым в системе маркетинга при формировании комплексных услуг, является выявление потребительских предпочтений с учетом функции полезности. Походы к потребительской оценке у разных групп потребителей (клиентов) могут быть различными. В статье рассмотрены в общем виде задачи потребительского выбора услуги, предложены модели этого выбора, которые позволяют решить задачу потребительского выбора различных комплексных услуг с учетом их полезности и ограничений на денежные расходы потребителей.

Ключевые слова: *услуги, потребительский спрос, функция полезности*

Ключевым вопросом, решаемым в системе маркетинга при формировании комплексных услуг, является выявление потребительских предпочтений с учетом функции полезности.

Взгляды на комплексную услугу тех, кто ее покупает, и тех, кто ее предлагает, могут быть совершенно различными. Клиент покупает не продукт, он покупает его потребительские свойства. В этой связи характерно высказывание одного из ведущих маркетологов С. Вильямса: «Покупатель не покупает сверла диаметром в четверть дюйма, он покупает дырки диаметром в четверть дюйма». Точно так же клиент не покупает билет на круиз, он покупает отдых, впечатления, знания или то и другое вместе и в различных сочетаниях. Поэтому важно выявить его потребности, те качества услуги (или их часть), которым определенная группа потребителей — сегмент рынка — отдает предпочтение, которые наиболее полно соответствуют потребительским предпочтениям.

Походы к потребительской оценке у разных групп потребителей (клиентов) могут быть различными. Для одних важна только одна характеристика (доминанта), для других — группа характеристик, для третьих — иерархический набор, четвертые имеют идеальное представление о товаре или услуге и смотрят, насколько предлагаемый товар отличается от этого представления.

Рассмотрим в общем виде задачу потребительского выбора услуги. Пусть потребитель располагает доходом ***I***, который полностью расходуется им на приобретение услуг, причем их цены считаются заданными. Учитывая текущие структуру цен, объем дохода ***I*** и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенное количество услуг. Математическая модель его поведения в этой ситуации называется *моделью потребительского выбора* (ПВ) [1].

Для упрощения, рассмотрим модель ПВ с двумя видами комплексных услуг, что удобно интерпретировать графически, сохраняя при этом принципиальные свойства общей модели. Итак, *потребительский набор* как вектор (x_1, x_2) состоит из двух благ (x_1 — количество единиц первой услуги, x_2 — количество единиц второй услуги).

Выбор каждого потребителя характеризуется отношением предпочтения: про каждые два набора он может сказать, что либо один из них более желателен, либо они для него равноценны (отношение предпочтения транзитивно, т.е. если набор $A = (a_1, a_2)$ предпочтительнее набора $B = (b_1, b_2)$, а набор B предпочтительнее набора $C = (c_1, c_2)$, то набор A предпочтительнее набора C.

На множестве потребительских наборов (x_1, x_2) можно определить индивидуальную *функцию полезности потребителя* $u(x_1, x_2)$, значение которой на потребительском наборе (x_1, x_2) соответствует его потребительской оценке по этому набору. Потребительскую оценку $u(x_1, x_2)$ называют еще *уровнем* (или *степенью*) удовлетворения потребностей индивида, если он приобретает или потребляет данный набор (x_1, x_2). Если набор A предпочтительнее набора B, то $u(A) > u(B)$.

Функция полезности удовлетворяет следующим свойствам [2]:

1) рост потребления одной комплексной услуги при постоянном потреблении другой ведет к росту потребительской оценки. Если

$x_1^2 > x_1^1$, то $u(x_1^2, x_2) > u(x_1^1, x_2)$;

$x_2^2 > x_2^1$, то $u(x_1, x_2^2) > u(x_1, x_2^1)$.

Данное свойство вытекает из условия существования первых частных производных функции полезности:

$\partial u(x_1, x_2) / \partial x_1 = u_1' > 0;$

$\partial u(x_1, x_2) / \partial x_2 = u_2' > 0.$

Первые частные производные называют *предельными полезностями* комплексных услуг, обозначаемых как u_1', или $M_1\ u(x_1, x_2)$, — предельная полезность первой услуги, а u_2', или $M_2\ u(x_1, x_2)$, — предельная полезность второй услуги;

2) предельная полезность каждой услуги уменьшается при росте объема ее потребления (данное свойство предельной полезности называется *законом убывания предельной полезности* и вытекает из условия отрицательности вторых частных чистых производных):

$\partial^2 u / \partial x_1^2 = u_{11} < 0$, $\partial^2 u / \partial x_2^2 = u_{22} < 0$

3) предельная полезность каждой услуги увеличивается, если растет количество другой услуги (благо, количество которой не изменяется, оказывается относительно *дефицитным*, а каждая дополнительная единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно). Данное свойство справедливо лишь для услуг, не являющихся полностью замещаемыми в потреблении, т. е. если

$\partial^2 u / \partial x_1 \partial x_2 = u''_{12} = \text{const}$;

$\partial^2 u / \partial x_2 \partial x_1 = u''_{21} > 0$.

Линия, соединяющая потребительские наборы услуг (x_1, x_2), имеющие один и тот же уровень удовлетворения потребностей индивида, называется *линией безразли-*

чия, или *линией уровня функции полезности.* Множество линий безразличия называется *картой линии безразличия.* Линии безразличия, соответствующие разным уровням удовлетворения потребностей» не касаются и не пересекаются (см. рис. 1, а, б) [2].

Если линия безразличия lt_3 расположена выше и правее («северо-восточнее») линии безразличия lt_2, то $t_3 > t_2$. Иначе, чем «северо-восточнее» расположена линия безразличия, тем большему уровню удовлетворения потребности она соответствует. В целом свойства 1–3 означают, что линии безразличия убывают (являются нисходящими) и строго выпуклы к началу координат.

Рассмотрим фиксированную линию безразличия lt, присущую потребительскому набору (x_1, x_2) lt. При выполнении ряда естественных предположений (непрерывность первых частных производных u_1', u_2' и $u_2' = 0$) справедливо (рис.1, в), что

$\partial x_1/\partial x_2 = -\text{tgf} \approx -\text{tga} = Dx_2''/Dx_1'' \approx -u_1'/u_2'$.

Отношение (Dx_2/Dx_1) показывает, на сколько должен индивид увеличить (уменьшить) потребление второй услуги, если он уменьшил (увеличил) потребление первой услуги на одну единицу без изменения уровня удовлетворения своих потребностей. Геометрически этот вывод интерпретируется таким образом: точки $A\ (x_1, x_2)$, $B\ (x_1 + Dx_1, x_2 + Dx_2)$ принадлежат одной и той же линии безразличия lt. Поэтому дробь Dx_2/Dx_1 принято называть *нормой замены* первой услуги второй на потребительском наборе (x_1, x_2), а производную $\partial x_2/\partial x_1$, примерно равную предельному значению Dx_2/Dx_1 при $Dx_1 \to 0$, — предельной нормой замены первой услуги второй.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора $A\ (x^\circ_1, x^\circ_2)$, который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении. Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на услугу не могут превышать денежного дохода:

$p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$,

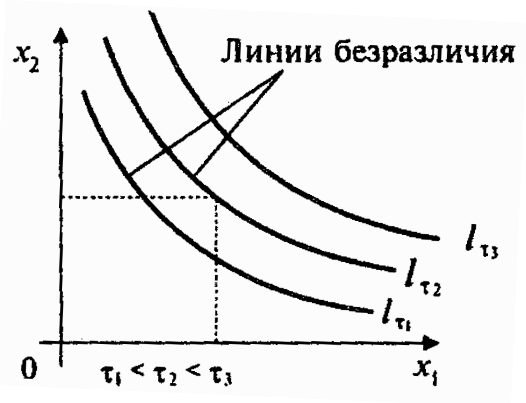
где p_1 и p_2 —рыночные цены одной единицы первой и второй услуги соответственно, I — доход индивида, предназначенный для приобретения первой и второй услуги (величины p_1, p_2 и I заданы).

Формально задача потребительского выбора может иметь вид:

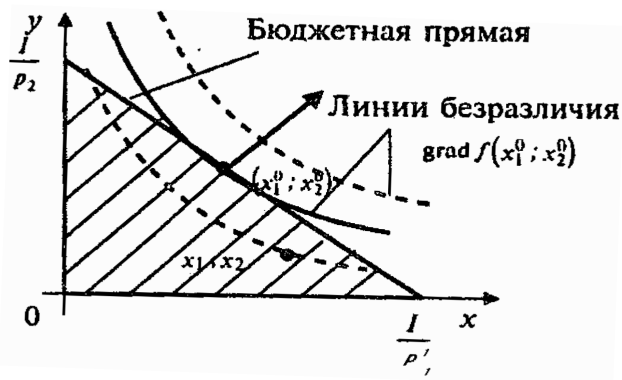
$$u(x_1, x_2) \to max,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq I, \qquad (1)$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Допустимое множество задачи (т.е. множество наборов услуг, доступных для потребителя) представляет собой треугольник, ограниченный осями координат и бюджетной прямой (рис. *1,* б). На этом множестве требуется найти точку, принадлежащую кривой безразличия с максимальным уровнем полезности. Поиск этой точки можно интерпретировать графически как последовательный переход на линии все более высокого уровня полезности (вправо-вверх) до тех пор, пока эти линии еще имеют общие точки с допустимым множеством.

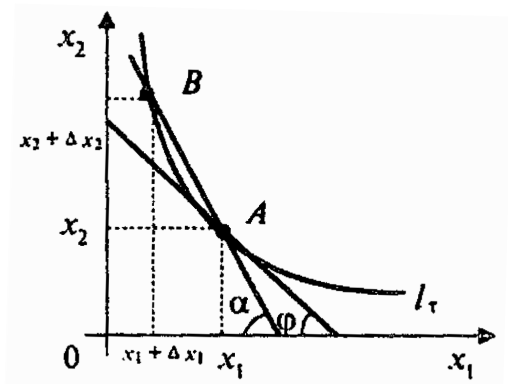
Решение задач потребительского выбора и его свойства. Набор (x°_1, x°_2), являющийся решением задачи потребительского выбора, принято называть *оптимальным* для потребителя, или *локальным рыночным равновесием* потребителя. Основным важным свойством задачи потребительского выбора является то, что оптимальное решение задачи (x°_1, x°_2), сохраняется при любом монотонном преобразовании функции полезности $u_1(x_1, x_2)$. Так как значение $u(x^\circ_1, x^\circ_2)$ является максимальным на всем допустимом множестве, то оно остается



а) линия безразличия;



б) график потребительского выбора;



в) интерпретация замены услуг.

Рис. 1. Графическая интерпретация потребительского спроса

таким и после монотонного преобразования функции полезности при сохраняющемся неизменным бюджетном ограничении (монотонное преобразование возникает при умножении функции полезности на некоторое положительное число, возведение ее в положительную степень, логарифмирование по основанию, большему единицы; заметим, что это свойство должно присутствовать у любой функции полезности.

Как видно из (1), задача потребительского выбора является задачей *нелинейного программирования.* Однако, если на каком-либо потребительском наборе (x_1, x_2) бюджетное ограничение $p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$ выполняется как строгое неравенство, то мы можем увеличить потребление какого-либо из продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор (x°_1, x°_2), максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т. е. $p_1x_1 + p_2x_2 = I$. Графически это означает, что решение $(x°_1, x°_2)$ задачи потребительского выбора должно лежать на бюджетной прямой (см. рис. 1, б), которую удобнее всего провести через точки пересечения с осями координат, где весь доход тратится на один продукт: $(0; I/p_2)$ и $(I/p_1 ; 0)$.

Таким образом, решение задачи потребительского выбора можно заменить на решение задачи на условный экстремум, для решения которой применим метод Лагранжа [2, 4]:

$u(x_1, x_2) \to max,$

$p_1x_1 + p_2x_2 \le I,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Функция Лагранжа имеет вид:

$L(x_1, x_2, l) = u(x_1, x_2) + l(p_1x_1 + p_2x_2 - I).$

Найдем ее первые частные производные по переменным x_1, x_2, l и приравняем их к нулю:

$\partial L/\partial x_1 = u_1' - lp_1 = 0;$

$\partial L/\partial x_2 = u_2' - lp_2 = 0;$

$\partial L/\partial l = p_1x_1 + p_2x_2 - I = 0.$

Исключив из полученной системы трех уравнений с тремя неизвестными неизвестную l, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2:

$u_1' / u_2' = p_1 / p_2 ;$

$p_1x_1 + p_2x_2 = I.$

Решение $(x°_1, x°_2)$ этой системы есть «укороченная» критическая точка функции Лагранжа, которая обязательно является решением задачи потребительского выбора (за исключением угловых решений, которые здесь не рассматриваются). Заменив левую часть равенства, получим:

$u_1'(x_1, x_2) / u_2'(x_1, x_2) = p_1 / p_2$

т. е. в точке $(x°_1, x°_2)$ локального рыночного равновесия индивида отношение $u_1'(x°_1, x°_2) / u_2'(x°_1, x°_2)$ предельных полезностей $u_1'(x°_1, x°_2)$ и $u_2'(x°_1, x°_2)$ благ равно отношению их рыночных цен *p1* и *p2*:

$u_1'(x°_1, x°_2) / u_2'(x°_1, x°_2) = p_1 / p_2$ (2)

В связи с тем, что отношение $u_1'(x°_1, x°_2) / u_2'(x°_1, x°_2)$ равно предельной норме замены первого блага вторым в точке локального рыночного равновесия $(x°_1, x°_2)$, из (2) следует, что эта предельная норма равна отношению рыночных цен p_1 / p_2 на блага.

Геометрически решение $(x°_1, x°_2)$ можно интерпретировать как точку касания линии безразличия функции полезности $u_1(x_1, x_2)$ с бюджетной прямой $p_1x_1 + p_2x_2 = I$ (см. рис. 1, б). Это определяется тем, что отношение $\partial x_2/\partial x_1 = -u_1' / u_2'$ показывает тангенс угла наклона линии уровня функции полезности, а отношение $-p_1 / p_2$ представляет тангенс угла наклона бюджетной прямой. Так как в точке потребительского выбора (или локального рыночного равновесия) они равны, в этой точке происходит касание данных двух линий. Из сказанного выше следует, что

$-Dx°_2 / Dx°_1 = p_1 / p_2 ,$ (2а)

т.е. отношение (со знаком минус) конечных (относительно небольших) изменений $Dx°_2$ и $Dx°_1$ объемов благ в локальном рыночном равновесии $(x°_1, x°_2)$ приближенно равно отношению рыночных цен p_1 и p_2 на используемые блага.

Условие (2а) обусловливает примерные оценки отношения рыночных цен при известных конечных изменениях объемов услуг в потребительском наборе, приобретаемом потребителем, причем координаты $(x°_1, x°_2)$ решения задачи потребительского выбора — это функции параметров p_1, p_2 и I: $x°_1 = f(p_1, p_2, I)$, $x°_2 = f(p_1, p_2, I)$, называемые *функциями спроса* по первой и второй услугам. Важным свойством функций спроса является то, что их значения инвариантны по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода (если все цены и доход изменятся в *к*-е число раз, величина спроса на продукт останется неизменной).

Пусть неизвестные количества услуг равны x_1 и x_2, а их рыночные цены — p_1 и p_2. Тогда можно использовать следующую модель:

$u(x_1, x_2) = x_1, x_2 \to max,$

$p_1x_1 + p_2x_2 \le I,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Так как бюджетное ограничение в оптимальной точке $(x°_1, x°_2)$ должно выполняться как равенство, и обе услуги жизненно необходимы (полезность равна нулю, если одно из них отсутствует), то требования неотрицательности переменных тоже выполняются, и решаемая задача математического программирования превращается в классическую задачу на условный экстремум. Записав необходимые условия экстремума (согласно которым отношения предельных полезностей благ должны равняться отношениям их рыночных цен, а бюджетное ограничение выполняется как равенство), получаем систему уравнений:

$x_2 / x_1 = p_1 / p_2 ; p_1x_1 + p_2x_2 = I.$

Первое условие означает, что количества денег, затрачиваемые на обе услуги, должны быть одинаковыми $(x_1 p_1 = x_2 p_2)$, что вытекает из равенства весов или показателей степени переменных x_1, x_2 в функции полезности: $x_1 p_1 = x_2 p_2 = I/2$ и функции спроса приобретают вид:

$x_1 = 0{,}5\, I / p_1; x_2 = 0{,}5\, I / p_2.$

Таким образом, расход на каждую услугу составляет половину общего дохода потребителя, и чтобы найти необходимое количество каждой услугу, следует разделить расходуемую на него сумму на его цену.

Случай потребительских наборов $(x_1, ..., x_n)$ из *n* услуг принципиально аналогичен ситуации с двумя услугами, но технически реализуем несколько сложнее.

Общая модель потребительского выбора. Рассмотрим свойства задачи потребительского выбора с произвольным числом услуг и целевой функцией общего вида с последующим переходом к некоторым задачам, включая анализ компенсированного изменения цен [1, 2].

Пусть заданы целевая функция предпочтения потребителя $u(x_1, ..., x_n)$, где x_i — количество *i-го* блага, вектор цен $\{p_i\} = (p_1, ... , p_n)$ и доход I. Сформулируем следующую задачу:

$u(x) \to max$ (3)

при условиях

$px \le I, \ x \ge 0.$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $p = (p_1, ..., p_n)$, $px = (p_1 x_1, ..., p_n x_n)$.

Считаем, что неотрицательность переменных обеспечивается свойствами целевой функции и бюджетного ограничения. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и исследовать ее на безусловный экстремум.

Функция Лагранжа $L(x, l) = u(x) + l(px - I)$.

Необходимое условие экстремума состоит в равенстве нулю частных производных:

$L_i' = u_i' + lp_i = 0$ для всех i $(i = 1, n)$

и $L' = px - I = 0$.

Отсюда следует, что для всех *i, j* в точке $x°$ локального рыночного равновесия выполняется равенство:

$u_i' / u_j' = p_i' / p_j'$,

получаемое после перенесения вторых слагаемых необходимых условий в правую часть и делением i-го равенства на j-е. В точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух услуг равно отношению их рыночных цен, поэтому $u_i' / p_i = u_j' / p_j$.

Таким образом, получаем, что дополнительная полезность, приходящаяся на дополнительную единицу денежных затрат, в точке оптимума одинакова по всем видам услуг (если это все было не так, то по крайней мере одну денежную единицу можно было бы перераспределить так, чтобы выросло благосостояние, или значение функции полезности, потребителя. Если для некоторых i, j услуг достигнуто, что $u_i' / p_i > u_j' / p_j$, то можно попытаться перераспределить деньги от i к j, увеличив уровень благосостояния потребителя.

Для оценки потребительских предпочтений и выбора ассортиментного состава предложения услуг для определенного сегмента рынка наиболее эффективно использование метода экспертных оценок ExC — Expert Choice [3].

Исходные данные для оценок представлены матрицей m x n оценок соответствия потребительских качеств отдельных видов (модификаций) комплексных туристских услуг требованиям потребителей, где $i = 1, 2, ..., n$ — номера признаков, оценивающих вариант услуги $j = 1, 2, ..., m$ — номера оцениваемых видов услуг.

Варианты $M_j \in C \{A_{ij}\}$, где A_{ij} — оценка в баллах соответствия i–го качества услуги потребительскому представлению. Обычно используется диапазон балльных оценок 100–10. Уровень в 10 баллов определяет полное соответствие представлению об услуге, 0 — отсутствие соответствия требованиям потребителей. Как правило, нулевой уровень (полное несоответствие) является гипотетической ситуацией, поэтому практически балльные оценки начинаются с 1 — минимального соответствия.

Оценки потребительских предпочтений комплексных услуг могут быть использованы как для определения тех потребительских свойств, которым уделяется особое внимание при их выборе в определенном секторе рынка, так и при адаптации потребительских свойств услуг при модификации отдельных ее компонентов. Возможно также использование для оценки деловых партнеров и выбора стратегий относительно организации деловых отношений и пр.

В принципе система ExC универсальна и может быть использована в любом случае, где есть несколько вариантов выбора и каждый вариант определяется одним и тем же набором характеристик, оцениваемых по балльной шкале.

Таким образом, приведенные модели позволяют решить задачу потребительского выбора различных комплексных услуг с учетом их полезности и ограничений на денежные расходы потребителей.

Литература

1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Чермных Ю.Н. Математические методы в экономике. — М.: ДИС, 1997.

2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ — ДАНА, 2000.

3. Богалдин-Малых В.В. Современные методы управления: российская реальность. — М.: Воронеж: НПО «МОДЭК», 2002.

4. Алексеев О.Г. Комплексное применение методов дискретной оптимизации. — М.: Наука, 1987.